

Được sử dụng 1 tờ giấy A4 tài liệu viết tay

Câu 1 (2 điểm)

a) Cấu trúc nghiệm hệ phương trình vi phân tuyến tính.

Xét hai hệ phương trình vi phân

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{và} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1')$$

và hệ (1) có nghiệm riêng $X_p = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} e^{\alpha t}$.

Khi đó, nghiệm tổng quát hệ (1) là $X(t) = \dots$.

Biết hệ (1') có hệ nghiệm cơ bản

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{5t} \sin 2t \\ -e^{5t} \cos 2t \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} e^{5t} \cos 2t \\ e^{5t} \sin 2t \end{pmatrix}$$

(làm bài câu này Anh/Chị viết chính xác $X(t) = \dots$ vào giấy làm bài thi).

b) INTERACTING POPULATIONS MODEL.

Giả sử hai cộng đồng dân cư P, Q tương tác với nhau theo quy luật ức chế tăng trưởng nhau, được mô hình **xấp xỉ** bởi hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = aP - bQ & a > 0, b > 0 \\ \frac{dQ}{dt} = -cP + dQ & c > 0, d > 0. \end{cases}$$

Cho biết $a = 5, b = 3, c = 4, d = 4, P(0) = 80$ (triệu), $Q(0) = 60$ (triệu) và đơn vị thời gian t là thế kỷ (100 năm). Giải hệ phương trình vi phân tìm $P(t), Q(t)$.

Theo mô hình trên, khoảng bao nhiêu năm thì một trong hai cộng đồng dân cư trên hầu như bằng 0 (bị triệt tiêu hay gần như tuyệt chủng)?

Câu 2 (3 điểm)

a) Bài toán truyền sóng thuần nhất - Dao động uốn của thanh dầm.

Độ dịch chuyển $u(x, t)$ trong dao động uốn của thanh dầm chiều dài L như hình vẽ thỏa phương trình đạo hàm riêng, với điều kiện biên và điều kiện ban đầu như sau.



$$PT: a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$BC: \begin{cases} u(0, t) = 0, & u(L, t) = 0, & t > 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0, & t > 0 \end{cases}$$

$$IC: u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Anh/Chị hãy nêu tên các bước giải bài toán này.

(**Bước 1: ...; Bước 2: ...; Bước 3: ...; Bước 4: ...**).

Cho biết nghiệm bài toán dạng $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n^2 \pi^2 a t}{L^2} + B_n \sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{L^2} \right) \sin \frac{n \pi x}{L}$,

trong đó $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n \pi x}{L} dx, B_n = \frac{2L}{n^2 \pi^2 a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n \pi x}{L} dx$ với $n = 1, 2, 3, \dots$

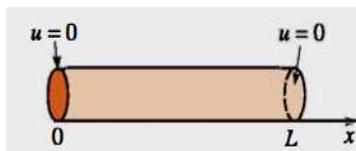
Giải bài toán tìm $u(x, t)$ khi biết $L = 2\pi, f(x) = \sin 2x, g(x) = x(2\pi - x), 0 < x < 2\pi$.

b) Bài toán truyền nhiệt một chiều không thuần nhất.

$$PT: k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-2x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$BC: u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$IC: u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$



Giải bài toán tìm $u(x, t)$ biết $L = \pi$ và $f(x) = 10 + \sin x$.

(Nhiệt độ hai đầu bằng 0, nhiệt độ ban đầu tại x là $f(x)$)

(đơn vị bài này là $^{\circ}C$).

Câu 3 (5 điểm)

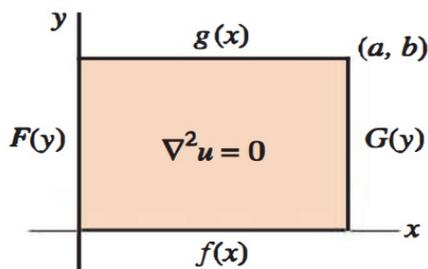
a) Phương trình Laplace, bài toán truyền nhiệt trạng thái dừng trong hình chữ nhật.

$$PT: \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (1)$$

$$BC: \begin{cases} u(0, y) = F(y), & u(a, y) = G(y) \\ u(x, 0) = f(x), & u(x, b) = g(x). \end{cases} \quad (2)$$

Giải bài toán tìm $u(x, y)$ biết $a = \pi, b = 2\pi$ và $f(x) = 140, g(x) = 160, F(y) = 100, G(y) = 200$

(đơn vị bài này là $^{\circ}C$).



(Steady Temperatures in a Rectangular Plate)

b) Phương trình Laplace, bài toán truyền nhiệt trạng thái dừng trong đĩa tròn bán kính bằng c .

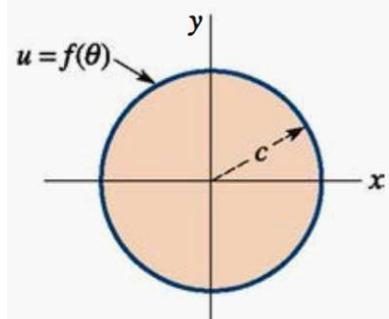
$$PT: \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < r < c, \quad 0 < \theta < 2\pi \quad (1)$$

$$BC: u(c, \theta) = f(\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (2)$$

Giải bài toán tìm $u(r, \theta)$ biết

$$f(\theta) = \begin{cases} 60\theta & , \quad 0 < \theta < \pi \\ 60(2\pi - \theta) & , \quad \pi < \theta < 2\pi \end{cases}, c = 4$$

(đơn vị bài này là $^{\circ}C$).



(PT(1) - Laplacian in Polar Coordinates)
(Steady-state Temperatures in a Circular Plate).

c) Bài toán truyền sóng một chiều (thuần nhất).

$$PT: a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$BC: u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$IC: u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L \quad (\text{vị trí ban đầu } f(x), \text{ vận tốc ban đầu } g(x)).$$

Giải bài toán tìm $u(x, t)$ biết $L = \pi, f(x) = \sin 2x + \sin 4x$ và $g(x) = a$.



(hai đầu gắn chặt)

Ghi chú

- 1) Sinh viên được phép sử dụng các công thức nghiệm thiết lập khi học hay trong giáo trình.
- 2) Cán bộ coi thi không giải thích đề thi.

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra học phần (về kiến thức)
Câu 1: Nắm vững cấu trúc nghiệm và giải được hệ phương trình vi phân tuyến tính, đồng thời hiểu được ý nghĩa các kết quả tìm được.	G1: 1.2 G2: 2.1.4, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6, 2.4.7, 2.5.1.
Câu 2 & 3: Nhận dạng và giải được các bài toán truyền sóng, truyền nhiệt rồi ứng dụng vào kỹ thuật, công nghệ, thực tế đời sống.	G1: 1.2 ; G2: 2.1, 2.3 ; G2: 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6, 2.4.7, 2.5.1.

Ngày 23 tháng 10 năm 2025

Thông qua Bộ môn Toán